

بسمه تعالی

تمرینهای تحویلی شماره 1:

بخش اول:

توجه: تاکید می شود قبل از شروع به حل تمرینها تسلط کافی به متن درس پیدا کرده باشید.

سوالها

1. هر یک از عملیات زیر را انجام دهید (ساده کنید)

$$\text{الف) } \frac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}}$$

$$\text{ب) } (2i - 1)^2 \left(\frac{4}{1-i} + \frac{2-i}{1+i} \right) \quad \text{ج) } 3 \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 - 2 \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^3$$

2. اگر $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = -2 + 4i$ و $z_3 = \sqrt{3} - 2i$ باشند، مطلوبست محاسبه

$$\text{الف) } \text{Im} \left(\frac{z_1 z_2}{z_3} \right) \quad \text{ب) } \left| z_1 (\overline{z_2 + z_3}) \right|$$

3. اعداد حقیقی x و y را از معادله $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$ تعیین کنید.

جوابها:

$$\text{1. الف) } i + 2 \quad \text{ب) } -\frac{11}{2} - \frac{23}{2}i \quad \text{ج) } -3 - 2i$$

$$\text{2. الف) } \frac{6\sqrt{3} + 4}{7} \quad \text{ب) } \sqrt{22 - 8\sqrt{3}}$$

$$\text{3. } x = -1 \text{ و } y = 2$$

بخش دوم:

توجه: تاکید می شود قبل از شروع به حل تمرینها تسلط کافی به متن درس پیدا کرده باشید.

سوالها:

1. صورت مثلثاتی (قطبی) هر یک از اعداد مختلط زیر را بنویسید.

$$\text{الف) } \frac{4+4i}{\sqrt{2}} \quad \text{ب) } -2\sqrt{3} - 2i \quad \text{ج) } -i \quad \text{د) } -4$$

2. حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد مختلط استاندارد بنویسید (صورت $x + iy$).

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \right)^4 \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^5$$

3. نشان دهید که

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \quad \text{الف}$$

$$(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right) \quad \text{ب}$$

4. معادله مختلط $z^2 - z + 1 = 0$ را حل کنید.

5. مکانهای هندسی زیر در حوزه اعداد مختلط را رسم کنید.

الف) مکان تمام نقاطی که در معادله $|z - i| = 2$ صدق می کند.

ب) ناحیه متشکل از همه نقاطی که $1 < |z + i| \leq 2$ باشد.

ج) مکان تمام اعداد مختلط z که $\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$.

جوابها:

نمادگذاری: به جای $\cos \theta + i \sin \theta$ می نویسیم $e^{i\theta}$ ، یعنی به عنوان مثال $e^{i\frac{\pi}{4}}$ یعنی $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$.

$$1. \text{ الف) } 4e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ب) } 4e^{i\frac{7\pi}{6}} \quad \text{ج) } e^{i\frac{3\pi}{2}} \quad \text{د) } 4e^{i\pi}$$

$$2. \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$4. z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

5. الف) دایره ای به مرکز $(0, 1)$ و شعاع 2،

ب) ناحیه بین دو دایره به مرکز $(0, -1)$ و شعاعهای 1 و 2 و نقاط روی دایره با شعاع 2.

تمرینهای تحویلی شماره 2:

بخش اول:

سوالها:

1. مختصات قطبی نقطه های p_1 و p_2 به صورت $p_1(2, \frac{-5\pi}{6})$ و $p_2(-3, \frac{\pi}{3})$ است، مختصات دکارتی آنها را بنویسید.

2. مختصات دکارتی نقاطی از صفحه در زیر داده شده است، مختصات قطبی آنها را بیابید.

$$\text{الف) } p_1(-3, 3) \quad \text{ب) } p_2(-2, -2) \quad \text{ج) } p_3(2, 0) \quad \text{د) } p_4(0, -1)$$

3. معادله خمهای زیر را در مختصات دکارتی بنویسید و از نظر هندسی معادله به دست آمده را توصیف کنید.

$$r = \frac{5}{3 \sin \theta - 4 \cos \theta} \text{ (ج)} \quad r = \sin \theta + \cos \theta \text{ (ب)} \quad r = -2 \csc \theta \text{ (الف)}$$

$$r = \frac{2}{\sqrt{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta}} \text{ (ذ)} \quad r^2 = \csc 2\theta \text{ (د)}$$

جوابها:

$$p_2\left(-\frac{3}{2}, -3\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ و } p_1(-\sqrt{3}, -1) \text{ . 1}$$

$$(2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}) \text{ (ب)} \quad (3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}) \text{ (الف) . 2}$$

$$(1, \frac{3\pi}{2}) \text{ (د)} \quad (2, 0) \text{ (ج)}$$

3. الف) خط موازی محور x ها

$$\text{(ب) دایره ای به مرکز } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ و شعاع } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{(ج) خطی با شیب } \frac{4}{3} \text{ و عرض از مبدا } \frac{5}{3}$$

$$\text{(د) هذلولی } xy = \frac{1}{2}$$

$$\text{(ذ) بیضی به طول قطر بزرگ } \sqrt{2} \text{ و طول قطر کوچک } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بخش دوم:

سوالها:

1. نمودار خمهای به معادلات زیر در مختصات قطبی را رسم کنید.

$$r = 1 - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \text{ (ج)} \quad r = 1 + \sqrt{2} \sin \theta \text{ (ب)} \quad r = 3 + \sin \theta \text{ (الف)}$$

$$r^2 = 9 \sin 2\theta \text{ (د)} \quad r = 2 \cos 3\theta \text{ (ج)}$$

2. نقاط برخورد منحنیهای زیر را تعیین کنید.

$$r = \cos \theta \text{ و } r = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \text{ (الف)}$$

ب) $r = 3$ و $r^2 = 9 \sin 2\theta$

راهنمایی:

1.ج) ابتدا نمودار $r = 1 - \cos \theta$ را رسم کرده، سپس نمودار را به اندازه $\frac{\pi}{6}$ در جهت دایره مثلثاتی دوران می دهیم (اگر $\frac{\pi}{6} +$ بود در خلاف جهت دوران می دادیم).

تمرینهای تحویلی شماره 3:

بخش اول:

توجه:

1. برای رسم تابع $y = |f(x)|$ ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده سپس قسمت‌های پایین محور x ها را بالا می آوریم.

2. در این تمرینها برای حل هیچ انتگرالی از روشهای انتگرالگیری استفاده نشود.

سوالات:

1. با توجه به شکل زیر حاصل انتگرالها را بنویسید.

$$\int_0^6 f(x) dx \quad \text{الف)} \quad \int_0^6 |f(x)| dx \quad \text{ب)} \quad \int_{-6}^0 f(-x) dx \quad \text{ج)}$$

2. فقط و فقط با توجه به تعبیر انتگرال معین به عنوان مساحت، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-1}^2 (1-2x) dx \quad \text{الف)} \quad \int_0^3 |2-x| dx \quad \text{ب)} \quad \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx \quad \text{ج)}$$

$$\int_0^2 \sqrt{2x-x^2} dx \quad \text{د)}$$

$$\int_0^3 f(x) dx \quad \text{ذ) که در آن} \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \\ x-2 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

3. مقدار متوسط توابع زیر را روی بازه های مشخص شده بیابید.

الف) تابع $y = \sqrt{2-x^2}$ روی بازه $[-\sqrt{2}, 0]$ ،

ب) تابع $y = \sin(x^3)$ روی بازه $[-3, 3]$.

جوابها:

1. الف) -1 (ب) 31 (ج) -1
2. الف) 0 (ب) $\frac{5}{2}$ (ج) $\frac{9\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{2}$ (ه) $\frac{5\pi}{2}$
3. الف) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ (ب) 0

راهنمایی:

2.د) $2x - x^2$ را مربع کامل کنید.

بخش دوم:

توجه: قبل از شروع به حل تمرینها تسلط کافی به متن درس پیدا کرده باشید.

سوالها:

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

- $\int (5x^2 - x^3) dx$
- $\int \left(\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) dx$
- $\int (\sqrt{x})^3 dx$
- $\int \frac{2x^2 - 3x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$
- $\int (6 \cos 3x + 12 \sin 2x) dx$
- $\int e^{-3x+4} dx$
- $\int_1^2 (8x+5) dx$
- $\int_0^1 8e^{2t} dt$
- $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
- $\int_{-2}^0 \frac{dx}{4+x^2}$
- $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cot^2 x) dx$
- $\int_{-\ln 3}^{\ln 2} e^{4x} dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x dx$
- $\int_0^{\pi} \cos^2 2x dx$
- $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| dx$
- $\int_0^4 |x-2| dx$
- $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx$
- $\int_3^4 f''(x) dx$
- $\int_1^{100} \frac{dx}{x^2}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x} dx$
- $\int e^{xy} dx$
- $\int_2^6 \left(\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) + \cot^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) dx$
- $\int_1^3 \frac{\operatorname{sgn}(x-2)}{x^2} dx$

جوابها:

$$\begin{array}{llll} \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} - \frac{18}{13}x^2\sqrt[6]{x} & \mathbf{.4} & \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} & \mathbf{.3} & \frac{-5}{x} + \frac{2}{x^2} & \mathbf{.2} & \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 & \mathbf{.1} \\ & & & & & & 2\sin 3x - 6\cos 2x & \mathbf{.5} \\ & 17 & \mathbf{.7} & \frac{-1}{3}e^{-3x+4} & \mathbf{.6} & & & \\ \frac{10-\pi}{8} & \mathbf{.11} & & \frac{\pi}{8} & \mathbf{.10} & \pi & \mathbf{.9} & \approx 25.556 & \mathbf{.8} \\ & & 3 & \mathbf{.15} & \frac{\pi}{2} & \mathbf{.14} & \sqrt{3} & \mathbf{.13} & \approx 3.996 & \mathbf{.12} \\ & & & & f'(4) - f'(3) & \mathbf{.18} & 11\frac{1}{4} & \mathbf{.17} & 4 & \mathbf{.16} \\ \frac{-4\pi+9}{\pi} & \mathbf{.22} & & \frac{1}{y}e^{xy} & \mathbf{.21} & -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{9}\sqrt{3} & \mathbf{.20} & 0.99 & \mathbf{.19} \\ & & & & & & & & & \frac{-1}{3} & \mathbf{.23} \end{array}$$

راهنمایی:

$$1 \quad x > 0$$

$\text{sgn } x = 0 \quad x = 0$ توجه کنید که

$$-1 \quad x < 0$$

تمرینهای تحویلی شماره 4:

بخش اول:

توجه:

1. قبل از حل تمرینهای این قسمت متن درس را دقیق و مثالهای آن را با دقت حل کرده باشید.

2. سوالهایی که ایراد دارید یا با استفاده از راهنمایی حل می کنید با نمادی مانند * متمایز

کرده و حتما بعد از زمانی مشخص مجدد حل کنید.

سوالها:

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$1. \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{30} \cdot \frac{1}{x^2} dx$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

$$3. \int \tan x dx$$

$$4. \int_0^2 x e^{4-x^2} dx$$

$$5. \int_0^{e^3-1} \frac{dx}{1+x}$$

$$6. \int_0^1 x(1-x)^{20} dx$$

$$7. \int_0^1 \cos x \cdot \cos(\sin x) dx$$

$$8. \int \frac{x}{1+x^4} dx$$

$$9. \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{4+3x^2}$$

$$10. \int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$$

$$11. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$12. \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$13. \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$$

$$14. \int \frac{e^{2x}+1}{e^x} dx$$

$$15. \int \frac{\sin^5 x}{\cos x} dx$$

$$16. \int \frac{3x+4}{(x-1)^{100}} dx$$

$$17. \int \frac{x^5}{\sqrt{x^2-4}} dx$$

$$18. \int_{-\frac{1}{3}}^2 \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}} dx$$

$$19. \int \sqrt{\tan x} \cdot \sec^2 x dx$$

$$20. \int_2^5 \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$21. \int_1^2 \frac{e^x}{e^x+e} dx$$

$$22. \int \frac{\sqrt[3]{\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

$$23. \int \frac{e^x+1}{e^x-1} dx$$

24. اگر f تابعی پیوسته باشد در موارد زیر $f(2)$ را بیابید.

$$a) \int_0^x f(t) dt = x^2(1+x)$$

$$b) \int_0^{x^2} f(t) dt = x^2(1+x)$$

25. مشتقهای زیر را محاسبه کنید:

$$a) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$b) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$$

جوابها:

$$\frac{1}{2}(e^4-1) \cdot 4$$

$$-\ln|\cos x| \cdot 3$$

$$\frac{-2}{1+\sqrt{x}} \cdot 2$$

$$\frac{-1}{31} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{31} \cdot 1$$

$$\frac{1}{2} \arctan(x^2) \cdot 8$$

$$\sin(\sin 1) \cdot 7$$

$$\frac{1}{462} \cdot 6$$

$$3 \cdot 5$$

$$\frac{1}{2} \cdot 12$$

$$\arctan(e^x) \cdot 11$$

$$\sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) \cdot 10$$

$$\frac{\pi}{8\sqrt{3}} \cdot 9$$

$$-\ln|\cos x| - \frac{1}{4} \cos^4 x + \cos^2 x \cdot 15$$

$$e^x - e^{-x} \cdot 14$$

$$\frac{\pi}{6} \cdot 13$$

$$\frac{-3}{98(x-1)^{98}} - \frac{7}{99(x-1)^{99}} \cdot 16$$

$$\frac{1}{5}(x^2-4)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}(x^2-4)\sqrt{x^2-4} + 16\sqrt{x^2-4} \cdot 17$$

$$\ln\left(\frac{e+1}{2}\right) \cdot 21$$

$$\frac{32}{3} \cdot 20$$

$$\frac{2}{3} \tan x \sqrt{\tan x} \cdot 19$$

$$\frac{16}{15} \cdot 18$$

$$\frac{3}{4} \sqrt[3]{\tan^4 x} \cdot 22$$

$$2 \ln(e^x-1) - x \cdot 23$$

$$a:16 \quad , \quad b:1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 24$$

$$a: \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} \quad .25$$

$$b: (\sin x - \cos x) \cos(\pi \sin^2 x)$$

راهنمایی:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad .3$$

10. در انتگرالهای شامل $\sqrt[n]{ax+b}$ تغییر متغیر $ax+b = u^n$ بسیار مناسب است.

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad .11$$

17. تغییر متغیر $x^2 - 4 = u$ تغییر متغیر مناسبی است.

18. مجدد تاکید می شود از مطلب گفته شده برای محاسبه انتگرالهای شامل $\sqrt[n]{ax+b}$ غفلت نکنید.

23. می توان به این صورت عمل کرد که ابتدا بنویسید :

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx = \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx + \int \frac{1}{e^x - 1} dx$$

حال انتگرال اول با کمی دقت قابل محاسبه است، در مورد

انتگرال دوم، صورت و مخرج را در e^{-x} ضرب کنید.

24. از طرفین تساوی مشتق بگیرید.

بخش دوم:

سوالها:

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$1. \int \frac{x^3}{2+x} dx$$

$$2. \int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

$$3. \int \cos^4 x dx$$

$$4. \int \cos 2x \cdot \sin 8x dx$$

$$5. \int \frac{x}{4x^2 + 12x + 13} dx$$

$$6. \int \sin^5 x \cdot \cos^2 x dx$$

$$7. \int \tan^6 x \sec^4 x dx$$

$$8. \int \tan^5 x \sec^7 x dx$$

جوابها:

$$-\sqrt{3-2x-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) \quad .2 \quad \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8 \ln|x+2| \quad .1$$

$$-\frac{1}{20} \cos 10x - \frac{1}{12} \cos 6x \quad .4 \quad \frac{3}{8} x + \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \quad .3$$

$$-\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x \quad .6 \quad \frac{1}{8} \ln(4x^2 + 12x + 13) - \frac{3}{8} \tan^{-1}\left(x + \frac{3}{2}\right) \quad .5$$

$$\frac{1}{11} \sec^{11} x - \frac{2}{9} \sec^9 x + \frac{1}{7} \sec^7 x \quad \mathbf{.8}$$

$$\frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x \quad \mathbf{.7}$$

راهنمایی:

4. در انتگرالهای اینچنینی از یکی از فرمولهای تبدیل ضرب به جمع مثلثاتی استفاده می کنیم، یعنی

فرمولهای زیر:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

6. در انتگرالهای به فرم $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ برای محاسبه اگر m فرد بود از تغییر متغیر $\cos x = u$ و اگر n فرد بود از تغییر متغیر $\sin x = u$ استفاده می کنیم.

7. در انتگرالهای به فرم $\int \sec^m x \tan^n x dx$ یا باید تغییر متغیر $\sec x = u$ را به کار برد یا $\tan x = u$ را، که

مبنای انتخاب این است که باید پس از جدا کردن du از عبارت زیر انتگرال، بتوانیم باقیمانده را بر حسب u

بنویسیم. دقت کنید در اینجا از فرمولهای مربوط به نوشتن $\sec x$ بر حسب $\tan x$ و برعکس

استفاده می شود.

تمرینهای تحویلی شماره 5:

بخش اول:

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

1. $\int x \cos x dx$

2. $\int (x+5)e^x dx$

3. $\int \arccos x dx$

4. $\int x(\ln x)^2 dx$

5. $\int e^{3x} \cos 2x dx$

6. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

7. $\int \frac{\ln(\ln(\sin x))}{\cot x} dx$

8. $\int x(\operatorname{arc} \cot x)^2 dx$

9. $\int x^2 e^{x^3} dx$

جوابها:

3. $x \cdot \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2}$

2. $(x+4)e^x$

1. $x \sin x + \cos x$

4. $\frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2$

5. $\frac{3}{13} e^{3x} \cos(2x) + \frac{2}{13} e^{3x} \sin 2x$

6. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$

9. $\frac{1}{3} e^{x^3}$

8. $\frac{1}{2}(x^2+1)(\cot^{-1} x)^2 + x \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

7. $\ln(\sin x)(\ln(\ln \sin x) - 1)$

راهنمایی:

6. مجدد تاکید می شود از مطلب گفته شده برای محاسبه انتگرالهای شامل $\sqrt[n]{ax+b}$ غفلت نکنید.
7. $\ln \sin x = u$

بخش دوم:

سوالها:

توجه: می توانید در صورت نیاز از حاصل انتگرال زیر بدون به دست آوردن آن استفاده کنید:

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|)$$

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

1. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

4. $\int_{-2}^2 \frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$

5. $\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$

6. $\int_{\ln\sqrt{3}}^0 e^x \sqrt{1+e^{2x}} dx$

7. $\int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{4-9x^2} dx$

8. انتگرال $\int \frac{x^3+1}{\sqrt{9-x^2}} dx$ را به دو روش محاسبه کنید. در کدامیک از انتگرالهای سوال قبل از دو روش می توان انتگرال را محاسبه کرد؟

جوابها:

1. $\frac{\sqrt{4-x^2}}{|x|} - \arcsin(\frac{x}{2})$.2 $-\frac{1}{2} \arcsin(\frac{2}{x}) = \frac{1}{2} \arccos(\frac{x}{2})$

3. $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}$.4 $\frac{\pi}{4}$

5. $\frac{1}{2} \tan^{-1}(x+2) + \frac{1}{4} \frac{2x+4}{x^2+4x+5}$.6 $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$

7. $\frac{64}{1215}$

8. $-\sqrt{9-x^2} (6 + \frac{1}{3}x^2) + \sin^{-1}(\frac{x}{3})$

تمرینهای تحویلی شماره 6 :

بخش اول:

سوالها:

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{lll}
1. \int \frac{dx}{7-x^2} & 2. \int \frac{x}{5x^2+9x-2} dx & 3. \int \frac{(5x^2+3x-2)dx}{x^3+2x} \\
4. \int \frac{dx}{x^5-x^3} & 5. \int \frac{x^2+1}{x^3+8} dx & 6. \int \frac{2x+1}{9x^2+6x+2} dx \\
7. \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx & 8. \int \frac{d\theta}{3\sin\theta-4\cos\theta} & 9. \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2} dx \quad 10. \int \sqrt{e^x+3} dx
\end{array}$$

جوابها:

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{55} \ln(5x-1) + \frac{2}{11} \ln(x+2) \cdot 2 & \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x+\sqrt{7}}{x-\sqrt{7}} \right| \cdot 1 \\
\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x-1) - \ln x \cdot 4 & 3 \ln(x^2+2) + \frac{3}{2} \sqrt{2} \tan^{-1} \left(\frac{1}{2} x \sqrt{2} \right) - \ln x \cdot 3 \\
\frac{7}{24} \ln |x^2-2x+4| + \frac{5}{12} \ln |x+2| + \frac{1}{4\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \right) \cdot 5 & \\
2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| \cdot 7 & \frac{1}{9} \ln(9x^2+6x+2) + \frac{1}{9} \arctan(3x+1) \cdot 6 \\
-\ln(e^x+1) + 2 \ln(e^x+2) \cdot 9 & \frac{1}{5} \ln(2 \tan(\frac{\theta}{2}) - 1) - \frac{1}{5} \ln(\tan(\frac{\theta}{2}) + 2) \cdot 8 \\
& 2\sqrt{e^x+3} - \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sqrt{3e^x+9}-3}{\sqrt{3e^x+9}+3} \right| \cdot 10
\end{array}$$

راهنمایی:

5. ابتدا می توان انتگرال را به صورت زیر نوشت:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+8} dx = \int \frac{x^2}{x^3+8} dx + \int \frac{1}{x^3+8} dx$$

حال انتگرال اول با کمی دقت قابل حل است، در مورد انتگرال دوم، مشابه آن در متن کتاب وجود دارد.

6. مساله از روش تجزیه کسر حل نمی شود(چرا؟)

9. ابتدا از تغییر متغیر $e^x = u$ استفاده کنید.

10. ابتدا از تغییر متغیر $u = e^x + 3$ استفاده کنید.

بخش دوم:

سوالها:

حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \dots + 1 \right)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$5. \int \sin^{\frac{1}{3}} x \cos^3 x dx$$

$$6. \int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$7. \int_0^1 \sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) dx$$

$$8. \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx$$

$$9. \int x^8 e^{-x^3} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{x(3+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

11. اگر تابع f در بازه $[a, b]$ دو بار مشتق پذیر و $f(a) = f(b) = 0$ باشد، نشان دهید که

$$\int_a^b (x-a)(b-x) f''(x) dx = -2 \int_a^b f(x) dx$$

جوابها:

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \quad \ln 2 \cdot 3 \quad \frac{1}{2} \cdot 2 \quad \frac{1}{3} \cdot 1$$

$$-2 \sin 1 + 4 \cos 1 \cdot 7 \quad \frac{14}{3} \sqrt{17} + \frac{2}{3} \cdot 6 \quad \frac{3}{4} \sin^{\frac{4}{3}} x - \frac{3}{10} \sin^{\frac{10}{3}} x \cdot 5$$

$$-\frac{1}{3} e^{-x^3} (2 + 2x^3 + x^6) \cdot 9 \quad (\sqrt{2}-1) \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \cdot 8$$

$$\frac{1}{6} \ln \frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x^2} + \frac{1}{12} \ln \frac{(2+\sqrt{1-x^2})^2}{3+x^2} \cdot 10$$

راهنمایی:

8. از روش جزء به جزء شروع به حل انتگرال کنید.

9. شروع حل با روش تغییر متغیر است.

10. با تغییر متغیر $1-x^2 = u$ حل انتگرال را شروع کنید.

11. از روش جزء به جزء برای حل انتگرال استفاده کنید.

تمرینهای تحویلی شماره 7:

بخش اول:

سوالها:

مساحت ناحیه محصور بین خمهای داده شده را بیابید. در سوال اول و دوم شکل ناحیه را نیز رسم کنید.

$$1. y = x^2 \text{ و } y = \sqrt{x}$$

2. $x - y = 7$ و $x = 2y^2 - y + 3$ ،

3. $y = 1 - x^2$ و $y = (x^2 - 1)^2$.

4. مساحت ناحیه محصور در حلقه $y^2 = x^2 - x^4$ را بیابید.

5. مساحت ناحیه محصوره که بین دو نقطه تقاطع متوالی دو منحنی $y = \sin^2 x$ و $y = \cos^2 x$ قرار گرفته اند را بیابید.

جوابها:

1. $\frac{1}{3}$ 2. 9 3. $\frac{4}{15}$ 4. $\frac{4}{3}$ 5. 1

راهنمایی:

5. $y = \pm \sqrt{x^2 - x^4}$

بخش دوم:

سوالها:

1. حجم مخروط به شعاع a و ارتفاع h را بیابید.

2. حجم استوانه به شعاع a و ارتفاع h را بیابید.

3. حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین خم $y = x(2 - x)$ و $y = 0$ بین $x = 0$ و $x = 2$ را

الف) حول محور x ها **ب)** حول محور y ها

بیابید و شکل ناحیه دورانی حاصل را نیز رسم کنید.

4. حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین $y = x$ و $x = 4y - y^2$ را

الف) حول محور y ها **ب)** حول محور x ها

بیابید و شکل ناحیه دورانی حاصل را نیز رسم کنید.

5. ناحیه مثلثی با راسهای $(0, -1)$ ، $(1, 0)$ و $(0, 1)$ را حول خط $x = 2$ دوران می دهیم حجم شکل حاصل را بیابید و در ضمن شکل ناحیه را نیز رسم کنید.

6. حجم بیضیگون حاصل از دوران بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را حول محور x ها بیابید.

7. دو لوله استوانه ای به گونه ای درون هم قرار گرفته اند که مرکز قاعده و قاعده هر دو لوله منطبق

بر هم هستند، اگر هر دو لوله به ارتفاع 10 باشند و قاعده یکی به شعاع 3 و دیگری به شعاع 5

باشد، با استفاده از انتگرالها حجم ناحیه بین این دو لوله را بیابید.

8. در ظرفی به شکل نیمکره و به شعاع 30 سانتیمتر آن قدر آب ریخته ایم که عمق ماکسیموم آب 20 سانتیمتر شده است، حجم آب موجود در ظرف را بیابید.

9. اگر در کره ای به شعاع 2 حفره ای استوانه ای به شعاع 1 و گذرنده از مبدا ایجاد کنیم، چه در صدی از حجم کره حذف می شود.

جوابها:

$$\begin{array}{llll} \frac{8\pi}{3} \text{ (ب)} & \frac{16\pi}{15} \text{ (الف)} & \pi a^2 h \text{ .2} & \frac{1}{3} \pi a^2 h \text{ .1} \\ & & \frac{27\pi}{2} \text{ (ب)} & \frac{108\pi}{5} \text{ (الف)} & \frac{10\pi}{3} \text{ .5} \\ & & \frac{4}{3} \pi ab^2 \text{ .6} & & \\ & & 1600\pi \text{ .7} & & \\ & & & & \approx 29322 \text{ cm}^3 \text{ .8} \\ & & & & \text{تقریبا 35 درصد} \end{array}$$

تمرینهای تحویلی شماره 8 :

بخش اول:

سوالها:

طول خمهای زیر را بیابید.

1. $y = 2x - 1$ از $x = 1$ تا $x = 3$ ،

2. $y^2 = (x - 1)^3$ از $(1, 0)$ تا $(2, 1)$ ،

3. $y = x^2$ از $x = 0$ تا $x = 2$.

4. محیط دایره ای به شعاع a را بیابید.

5. مساحت رویه حاصل از دوران خمهای زیر را حول خط مشخص شده بیابید.

(الف) $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 2$) حول محور y ها،

(ب) $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) حول محور x ها.

6. سطح جانبی استوانه ای به شعاع a و ارتفاع h را بیابید .

جوابها:

$$2\sqrt{5}.1 \quad \frac{13^{\frac{3}{2}} - 8}{27}.2 \quad \sqrt{17} + \frac{1}{4} \ln(4 + \sqrt{17}).3$$

$$2\pi a.4 \quad \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)(\text{الف}).5 \quad \pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))(\text{ب}).6$$

2\pi ah.6
راهنمایی:

4. محیط معادل 2 برابر طول خم نیم دایره به شعاع a است که بالا یا پایین محور x هاست.

بخش دوم:

سوالها:

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید و همگرایی یا واگرایی آنها را مشخص کنید.

$$1. \int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^3} \quad 2. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} \quad 3. \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad 5. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

6. اگر بدانیم $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx \quad (\text{ب}) \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \quad (\text{الف})$$

جوابها:

$$1. \frac{1}{2} \quad 2. 3\sqrt{2} \quad 3. \frac{1}{2} \quad 4. 8 \quad 5. 1.5$$

$$6. \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad (\text{الف}) \quad \frac{3}{8}\sqrt{\pi} \quad (\text{ب})$$

راهنمایی:

6. الف) برای محاسبه انتگرال از روش جزء به جزء استفاده کنید، به این صورت که قرار دهید $u = x$ و

$$.dv = xe^{-x^2}$$

تمرینهای تحویلی شماره 9 :

سوالها:

همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را مشخص کنید.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + n + 1}$$

$$2. \sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n + 1}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^3 e^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$6. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n+8}}{6^n \ln(n+1)}$$

$$7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{n^{n^2}}$$

$$8. \sum_{n=e}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^4}$$

$$9. \sum_{n=e}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^4}$$

در هر مورد مشخص کنید که سری مطلقا همگرا، به طور مشروط همگرا یا واگراست.

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos n\pi}{2n+3}$$

مرکز، شعاع و بازه همگرایی سریهای زیر را تعیین کنید.

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}} x^n$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-x)^n}{5^n \sqrt{n+1}}$$

جوابها:

1. همگرا 2. همگرا 3. واگرا 4. واگرا
 5. همگرا 6. همگرا 7. همگرا 8. همگرا 9. همگرا
 10. همگرای مطلق 11. مشروط همگرا
 12. $[-4, 4]$ 13. $(-\infty, \infty)$ 14. $(-1, 9]$